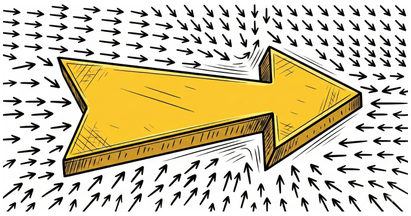
Złoty Wektor 2026
Etap II



Imię i nazwisko: ______________________________

Zadanie 1

Niech $n = 2^{31} \cdot 3^{19}$. Jak wiele dzielników liczby n^2 jest mniejsze od n, ale nie dzieli n?

Rozwiązanie: Niech $n = 2^\alpha 3^\beta$. Wtedy liczba dzielników $n^2 = 2^{2\alpha}3^{2\beta}$, to $(2\alpha+1)(2\beta+1)$ (każdy taki dzielnik jest postaci $2^i \cdot 3^j$, gdzie $0 \le i \le 2\alpha$, $0 \le j \le 2\beta$). Dobierzmy dzielniki n^2 różne od n w pary $\left(d, \frac{n^2}{d}\right)$. Jeśli $d < n$, to $\frac{n^2}{d} > n$, a jeśli $d > n$, to $\frac{n^2}{d} < n$. Liczba dzielników n^2 mniejszych od n to dokładnie połowa dzielników n^2, różnych od n, czyli

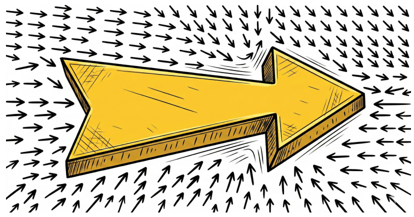
$$\frac{1}{2}\left((2\alpha+1)(2\beta+1)-1\right).$$

Spośród nich trzeba odjąć te, które dzielą n. Wszystkie dzielniki n poza samym n są mniejsze od n, a ich liczba to $(\alpha+1)(\beta+1)-1$. Szukana liczba jest więc równa

$$\frac{(2\alpha+1)(2\beta+1)-1}{2} - \big((\alpha+1)(\beta+1)-1\big).$$

Po uproszczeniu dostajemy $\frac{4\alpha\beta+2\alpha+2\beta}{2} - (\alpha\beta+\alpha+\beta) = \alpha\beta$.
Dla $\alpha = 31$, $\beta = 19$ dostajemy $31 \cdot 19 = 589$.

Złoty Wektor 2026
Etap II



Imię i nazwisko: ______________________________

Zadanie 2

Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ nierówność

$$4^{|x|} + 2(2m+1)2^{|x|} + 4m^2 - 5 > 0$$

jest prawdziwa dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$?

Rozwiązanie: Niech $t = 2^{|x|}$. Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $t \geq 1$, a dana nierówność przyjmuje postać $t^2 + 2(2m+1)t + 4m^2 - 5 > 0$. Szukamy więc takich m, dla których

$$f(t) = t^2 + 2(2m+1)t + 4m^2 - 5 > 0 \qquad \text{dla każdego } t \geq 1.$$

Ponieważ współczynnik przy t^2 jest dodatni, funkcja f jest parabolą skierowaną ramionami w górę. Jej wierzchołek ma współrzędną $t_0 = -\frac{2(2m+1)}{2} = -(2m+1)$. Trzeba więc rozważyć dwa przypadki.

Jeżeli $t_0 \leq 1$, to na przedziale $[1, \infty)$ funkcja f rośnie, więc wartość najmniejszą osiąga dla $t = 1$. Warunek $t_0 \leq 1$ daje

$$-(2m+1) \leq 1 \iff -2m \leq 2 \iff m \geq -1.$$

Wtedy musi zachodzić $f(1) > 0$. Liczymy:

$$f(1) = 1 + 2(2m+1) + 4m^2 - 5 = 4m^2 + 4m - 2.$$

Zatem

$$4m^2 + 4m - 2 > 0 \iff 2m^2 + 2m - 1 > 0.$$

Pierwiastki trójmianu $2m^2 + 2m - 1$ są równe $m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Stąd

$$2m^2 + 2m - 1 > 0 \iff m < \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{lub} \quad m > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Po uwzględnieniu warunku $m \geq -1$ zostaje $m > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Jeżeli natomiast $t_0 > 1$, to minimum na $[1, \infty)$ jest osiągane w wierzchołku, więc trzeba mieć $f(t_0) > 0$. Warunek $t_0 > 1$ daje

$$-(2m+1) > 1 \iff m < -1.$$

Ponadto

$$f(t_0) = 4m^2 - 5 - (2m+1)^2 = -4m - 6.$$

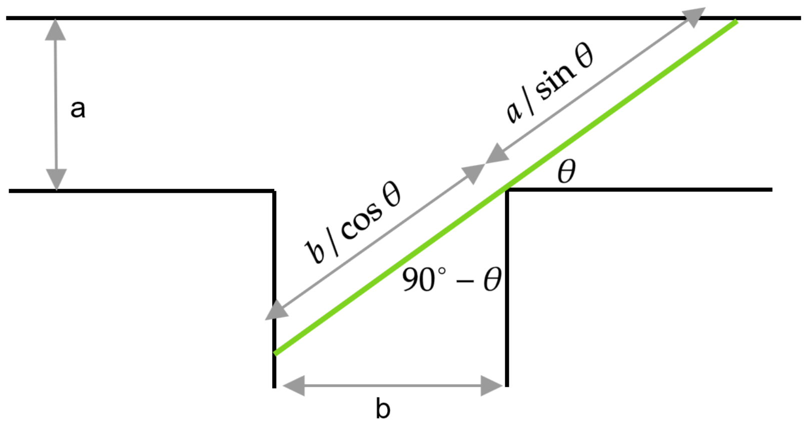
Zatem
$$-4m-6>0 \iff m<-\frac{3}{2}.$$
Łącznie otrzymujemy
$$m<-\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad m>\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$
Odpowiedź:
$$\boxed{m\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\infty\right).}$$

Złoty Wektor 2026
Etap II

Imię i nazwisko: ______________________________

Zadanie 3

Do rzeki o szerokości $a > 0$ wpada pod kątem prostym kanał o szerokości $b > 0$. Jaka jest największa długość sztuki drewna, która może wpłynąć z kanału do rzeki?



Rozwiązanie: Niech $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oznacza kąt, jaki w położeniu granicznym sztuka drewna tworzy z osią kanału. Wtedy długość drewna jest sumą dwóch odcinków:

$$L(\theta) = \frac{b}{\cos\theta} + \frac{a}{\sin\theta}.$$

Szukana największa długość drewna, którą da się przeprowadzić z kanału do rzeki, jest więc równa najmniejszej wartości tej funkcji:

$$L_{\max} = \min_{\theta\in(0,\pi/2)} \left(\frac{b}{\cos\theta} + \frac{a}{\sin\theta}\right).$$

Liczymy pochodną:

$$L'(\theta) = \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Warunek konieczny minimum ma postać

$$\frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

czyli

$$b\sin^3\theta = a\cos^3\theta.$$

Stąd

$$\tan^3\theta = \frac{a}{b}, \qquad \tan\theta = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/3}.$$

Zatem
$$\cos\theta = \frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}, \qquad \sin\theta = \frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}},$$
więc
$$L_{\max} = \frac{b}{\cos\theta} + \frac{a}{\sin\theta} = \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} + \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}.$$
Po uproszczeniu dostajemy
$$L_{\max} = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Ostatecznie największa długość sztuki drewna, która może wpłynąć z kanału do rzeki, wynosi
$$\boxed{\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}}.$$

Uwaga 1 *Po znalezieniu funkcji $L(\theta)$ można też zamiast rachunku różniczkowego skorzystać z* ***nierówności Höldera*** *w postaci*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{3/2}\right)^{2/3} \geq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
Z nierówności tej otrzymujemy oszacowanie
$$\frac{a}{\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta} \geq \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}.$$
Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a\cos^3\theta = b\sin^3\theta$, czyli dla tego samego kąta, który otrzymaliśmy z warunku $L'(\theta) = 0$.

Złoty Wektor 2026
Etap II

Imię i nazwisko: ______________________________

Zadanie 4

Na przyjęciu bawi się $n > 1$ chłopców oraz $m > 1$ dziewczynek. Żaden chłopiec nie tańczy ze wszystkimi dziewczynami, ale każda dziewczyna tańczy z minimalnie jednym chłopakiem. Pokaż, że istnieje czwórka dzieci: chłopcy X, Y oraz dziewczynki W, Z takie, że X tańczy z W oraz Y tańczy z Z, ale X nie tańczy z Z oraz Y nie tańczy z W.

Rozwiązanie: Wybierzmy chłopca X, który tańczył z największą liczbą dziewczyn. Ponieważ żaden chłopiec nie tańczy ze wszystkimi dziewczynami, istnieje dziewczyna Z, z którą X nie tańczy. Z założenia każda dziewczyna tańczy z co najmniej jednym chłopakiem, więc Z tańczy z pewnym chłopakiem Y. Mamy więc

$$Y \text{ tańczy z } Z, \qquad X \text{ nie tańczy z } Z.$$

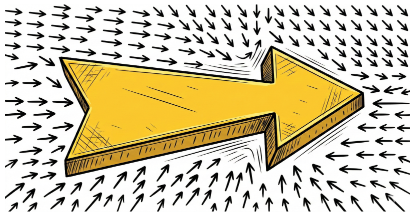
Ponieważ X został wybrany jako chłopiec tańczący z największą liczbą dziewczyn, chłopiec Y nie może tańczyć z większą liczbą dziewczyn niż X. Gdyby każda dziewczyna, z którą tańczy X, tańczyła także z Y, to zbiór partnerek X byłby zawarty w zbiorze partnerek Y. Ale Y tańczy jeszcze z Z, a X z Z nie tańczy, więc Y miałby wtedy ściśle więcej partnerek niż X, co przeczy wyborowi X. Zatem istnieje dziewczyna W, taka że

$$X \text{ tańczy z } W, \qquad Y \text{ nie tańczy z } W.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy czwórkę dzieci X, Y, W, Z, dla której

$$X \text{ tańczy z } W, \quad Y \text{ tańczy z } Z, \quad X \text{ nie tańczy z } Z, \quad Y \text{ nie tańczy z } W.$$

Złoty Wektor 2026
Etap II



Imię i nazwisko: ______________________________

Zadanie 5

Oznaczmy przez $r_k(n)$ resztę z dzielenia liczby naturalnej n przez liczbę naturalną k. Niech:

$$R(n) = r_1(n) + r_2(n) + \ldots + r_n(n).$$

Wykaż, że $R(2^{2026} - 1) = R(2^{2026})$.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że $r_{2^{2026}}(2^{2026}) = 0$. Jeżeli k nie jest potęgą dwójki, to nie dzieli liczby 2^{2026}. Wtedy przy przejściu z $2^{2026} - 1$ do 2^{2026} reszta zwiększa się o 1, czyli $r_k(2^{2026}) = r_k(2^{2026} - 1) + 1$. Jeżeli zaś $k = 2^j$ dla $j = 0, 1, \ldots, 2025$, to $r_{2^j}(2^{2026}) = 0$, natomiast $r_{2^j}(2^{2026} - 1) = 2^j - 1$, więc $r_{2^j}(2^{2026}) - r_{2^j}(2^{2026} - 1) = -(2^j - 1)$.
Zatem suma

$$(r_1(2^{2026}) - r_1(2^{2026} - 1)) + \ldots + (r_{2026}(2^{2026}) - r_{2026}(2^{2026} - 1)) \tag{1}$$

jest równa różnicy $A - B$, gdzie:

- A jest liczbą tych $k = 1, \ldots, 2^{2026}$, które nie są potęgami dwójki,

  (jest ich $(2^{2026} - 1) - 2026 = 2^{2026} - 2027$, bo w przedziale od 1 do $2^{2026} - 1$ jest dokładnie 2026 potęg dwójki: $1, 2, 4, \ldots, 2^{2025}$)

- B jest równe

$$(2^0 - 1) + (2^1 - 1) + \ldots + (2^{2025} - 1) = (2^{2026} - 1) - 2026 = 2^{2026} - 2027.$$

Obie wielkości są więc równe i suma (1) wynosi 0.