Czy matematyka jest tworzona czy też jest odkrywana?

Jan Hauke

Niewiele osób spoza świata matematyki zdaje sobie sprawę jak istotnym momentem w rozwoju matematyki było wprowadzenie liczby zero. Jako pierwsi liczbę tę wprowadzili Hindusi, według ich mitologii było to już ok. 17 000 lat przed naszą erą. W innych cywilizacjach działo się to (prawie niezależnie) znacznie później. W Europie stało się to dopiero na początku XIII wieku, choć wielu późniejszych matematyków w dalszym ciągu wykonywało (nawet skomplikowane) obliczenia bez używania zera. Wraz z rozwojem matematyki najpierw na poziomie arytmetyki i geometrii a później na poziomie bardziej teoretycznym (abstrakcyjnym) wprowadzano kolejne stałe matematyczne. Wprawdzie liczba Pi w matematyce zaistniała (w sensie stałej wyrażającej proporcję obwodu koła do jego średnicy) znacznie wcześniej, ale naturę jej niewymierności odkryto dopiero w XVIII w. Inne znaczące stałe matematyczne jak jednostka urojona i oznaczająca pierwiastek z liczby -1 oraz liczba e wynosząca w przybliżeniu 2,718 zaistniały w matematyce odpowiednio w XV i XVII wieku. Zadziwiającym jest fakt, że liczby (stałe) te, wprowadzone do matematyki w różnych okresach czasu w różnych cywilizacjach łączy jeden wzór. Tak jakby, ktoś stworzył wcześniej całą matematykę, a my ją tylko kawałkami odkrywamy. Wykład dotyczy tej niezwykłej zależności.

Plan prezentacji

1. Początki matematyki- systemy liczbowe
2. Zero w matematyce
3. Historia liczby Pi
4. Historia liczby e
5. Jednostka urojona, liczby zespolone
6. Wzór, który łączy wszystko co powyżej

Proste obliczenia towarzyszyły człowiekowi od zawsze.

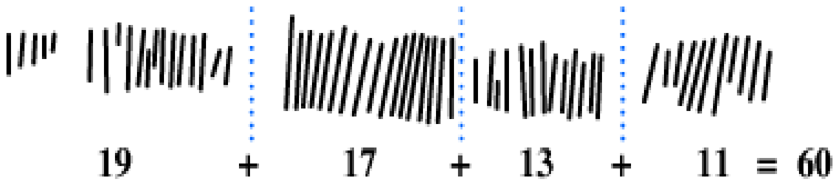
Typowym sposobem obliczania stosowanym przez społeczności pierwotne było liczenie na palcach lub paliczkach.

Na długo przed najwcześniejszymi źródłami pisanymi powstawały rysunki, mogące wskazywać na znajomość podstaw matematyki.

Starożytni łowcy znali też koncepcję liczenia „nic, jeden, dwa, wiele” w odniesieniu do złowionych zwierząt.

Istnieją przesłanki, że niektóre pierwsze próby liczenia były związane z przewidywaniem kolejnej menstruacji.
Znajdowano na przykład rządki 28, 29 lub 30 nacięć, po których następowało nacięcie różniące się od poprzednich.

Kość z Ishango – narzędzie wykonane z kości
(ma ok. 20 000 lat).
Na kości są trzy wyraźnie odróżniające się i pogrupowane rzędy nacięć.
Może to oznaczać, że służyła do zapisu systemu liczbowego.
Poniżej jeden z rzędów nacięć.



Zawiera wyraźnie nacięcia po 11, 13, 17 i 19 kresek.

Są to wszystkie kolejne liczby pierwsze zawierające się pomiędzy 10 a 20 (wydaje się, że to nie może być przypadek!!!)

Najbardziej prymitywnym systemem liczbowym jest jedynkowy system liczbowy, w którym występuje tylko jeden znak (np. 1, albo (częściej) pionowa kreska). W systemie tym kolejne liczby są tworzone przez proste powtarzanie tego znaku. Np. 3 w tym systemie jest równe 111, a pięć 11111. Systemem takim posługują się np. Pigmeje.

Podstawowe systemy:

- **Systemy addytywne** (dodawanie znaków – cyfry rzymskie CXVI)

- **Systemy pozycyjne**, które posiadają symbole (cyfry) tylko dla kilku najmniejszych liczb naturalnych. Cyfry te są kolejno umieszczane w ściśle określonych pozycjach i są mnożone przez odpowiednią potęgę (nazwijmy g – podstawę systemu) :

np. g=10: 0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9

$$102= 1*10^2+0*10^1+2*10^0 =1*100+0*10 +2*1$$

np. g=4: 0,1,2,3 (przeliczenia http://www.systemyliczbowe.urfu.pl/)

0, 1,2, 3, 10,11, 12,13, 20, 21,22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102,103,110,111, **112**, 113,120,121,122, 123,130, 131,132,133, 200, 201

112 $=1*10^2+ +1*10^1+2*10^0$ = (zapisane w systemie dziesiętnym) $1*16 +1*4+2*1=22$

Cyfry i dziesiętny system pozycyjny pochodzą z Indii, które około VII wieku najechali Arabowie.

To oni rozprzestrzenili ten system na zachód (w Europie)

europejskie	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
arabskie	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
bengalskie	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
gudżarati	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯

FUNDAMENT TEGO SYSTEMU - **ZERO**

Brahmagupta (ur. w 598? w Ujjain), zm. w 670 r. India

Brahmagupta, którego ojcem był Jisnugupta, napisał ważne prace z dziedziny matematyki i astronomii.
W szczególności w 628 roku napisał dzieło **Brahmasphutasiddhanta** .

Dzieło zostało napisane w 25 rozdziałach, a Brahmagupta mówi nam w tekście, że napisał je w Bhillamala, które dziś jest miastem Bhinmal. Była to stolica ziem rządzonych przez dynastię Gurjara.

W dziele tym zostało wprowadzone zero.

Pojmowanie systemów liczbowych przez Brahmaguptę wykraczało daleko poza zrozumienie innych z tego okresu.

W Brahmasphutasiddhancie – zdefiniował zero jako wynik odjęcia liczby od siebie.

Brahmagupta z pewnością się myli, gdy twierdzi, że zero podzielone przez zero jest zerem.

Jednak jego propozycja to genialna próba rozszerzenia arytmetyki na liczby ujemne i zero.

Liczba Pi (stosunek obwodu koła do jego średnicy): 3,14159265

Już w czasach zamierzchłych starożytni rachmistrze zauważyli, że wszystkie koła mają ze sobą coś wspólnego, że ich średnica i obwód pozostają wobec siebie w takim samym stosunku, a liczba ta bliska jest 3.

W egipskim papirusie Rhinda, datowanym na około 1650 r. p.n.e. podane jest przybliżenie Pi≈ 256/81 ≈ 3.1605.

W piramidzie Cheopsa (zbudowana ok. 2560 lat p.n.e.) stosunek sumy dwóch boków podstawy do wysokości wynosi 3,1416, czyli przybliżenie pi z dokładnością do czterech miejsc po przecinku!

Dziś nie można stwierdzić czy był to zadziwiający przypadek, czy wynik geniuszu nieznanych nam z imienia uczonych.

Biblia – Stary testament - Księgi królewskie – o królu Salomonie (rządził w latach 970–931 p.n.e .)

(1 Krl 7,23) Następnie sporządził odlew ”morza” o średnicy dziesięciu łokci, okrągłego, o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci (łokieć≈ 44,5 cm**).**

(1 Krl 7,24) Poniżej jego krawędzi opasywały je dokoła rozchylone kielichy kwiatowe. Na trzydzieści łokci otaczały ”morze” w krąg. W jego odlewie były razem odlane dwa rzędy rozchylonych kielichów kwiatowych.

(1 Krl 7,25) Stało ono na dwunastu wołach. Trzy zwracały się ku północy, trzy na zachód, trzy na południe i trzy na wschód. ”Morze” to znajdowało się nad nimi u góry, a wszystkie ich zady [zwracały się] do wewnątrz.

(1 Krl 7,26) Grubość jego była na [szerokość] dłoni (≈ 7,5 cm**), a brzeg był wykonany jak brzeg kielicha kwiatu lilii. Jego pojemność wynosiła dwa tysiące bat (**1 bat ≈ 22l**)**

Ta niedokładność (30/10= 3) mogła wynikać z powodu pomiaru zewnętrznego średnicy, a wewnętrznego obwodu.

Uwzględniając to wówczas

Pi ≈ 355/113 ≈ 3,14159292,

a takie właśnie przybliżenie podał Tsu Ch'ung Chi (429-501).

Inne przybliżenia:

Archimedes (III w. p.n.e.): 223/71< Pi < 22/7 ≈ 3,1429

Chiński matematyk Chang Hing (I w. n. e.): Pi ≈ 142/45 ≈ 3,1556

Klaudiusz Ptolomeusz (II w. n.e.): Pi ≈ 3+8/60+3/360 ≈ 3,1417

Nazywana bywa często ludolfiną. Nazwa ta pochodzi od imienia matematyka holenderskiego Ludolfa van Ceulena, który w 1610 roku obliczył wartość liczby Pi z dokładnością do 35 cyfr po przecinku.

James Gregory (1638- 1675):

Pi/4= 1-1/3+1/5-1/7……

Symbol π wprowadził walijski matematyk i pisarz William Jones w monografii *Synopsis Palmariorum Matheseos* w 1706 roku.

π jest pierwszą literą greckiego słowa περίμετρον – perimetron, czyli obwód

W 1761 roku Johann Lambert udowodnił niewymierność liczby Pi

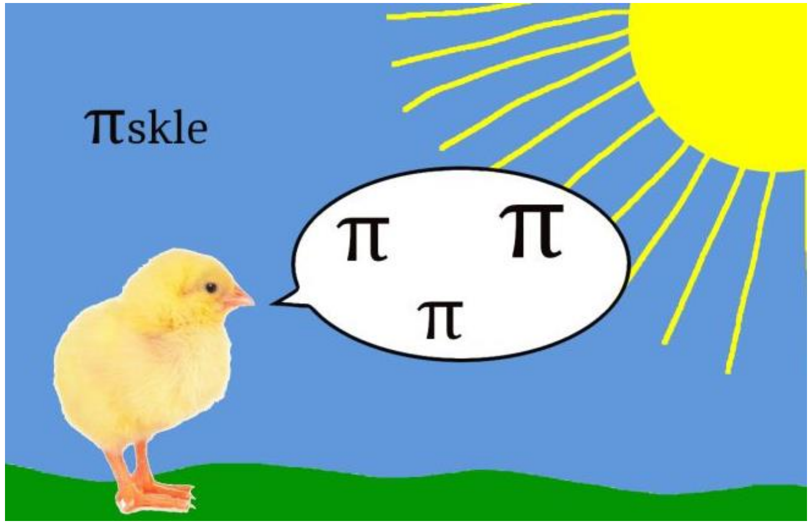
W 1873 roku William Shanks wyliczył Pi z dokładnością do 707 miejsc po przecinku (do 527 pozycji było poprawnie).

W 1949 roku komputer został użyty do obliczenia π z dokładnością do **2000** miejsc po przecinku.

Liczba PI

<u>Pytanie otwarte</u>:

Czy każda z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 występuje nieskończoną ilość razy w Pi?



Piosenki o Pi:
https://www.youtube.com/watch?v=3HRkKznJoZA&ab_channel=AsapSCIENCE

$$a^b = \mathrm{c} \qquad log_a c = b$$

$$2^3 = 8 \qquad log_2 8 = 3$$

$$10^3 = 1000 \qquad log_{10} 1000 = 3$$

$$log_a(AB) = log_a A + log_a B$$

$$log_a(A/B) = log_a A - log_a B$$

$e \approx 2{,}7182$

Liczba e weszła do matematyki kuchennymi schodami. Było to w 1618 roku, kiedy w dodatku do pracy Napiera o logarytmach pojawiła się tabela podająca logarytmy naturalne różnych liczb.

Nie były to logarytmy o podstawie dziesiętnej, a mającej w podstawie liczbę e. Logarytmy wówczas definiowane były inaczej niż dziś.

John Napier (1550-1617)

Ta tabela w dodatku, choć nie zawiera nazwiska autora, prawie na pewno została napisana przez Jamesa Oughtreda (1574 – 1660)

Jacob Bernoulli (1665-1705)

Liczba **e** weszła do matematyki także poprzez badanie procentu składanego. W 1683 Jacob Bernoulli badając ciągłe składane oprocentowanie, próbował znaleźć granicę wyrażenia: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, gdy n dąży do nieskończoności.

Pokazał on, że granica ta musi leżeć między 2 a 3.

Po raz pierwszy liczba **e** pojawia się w 1690 r. W tym roku Leibniz napisał list do Huygensa i użył w nim notacji **b** dla tego, co teraz nazywamy **e**

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)

Leonard Euler (1707-1783)

Oznaczenie tej liczby (e) zawdzięczamy Eulerowi.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Euler podał przybliżenie **e** do 18 miejsc po przecinku,

e = 2,718281828459045235

Obliczenia EXCEL

n	(1+1/n)^n	
1	2,0000	
2	2,2500	
3	2,3704	
4	2,4414	
5	2,4883	
10	2,5937	
100	2,7048	
400	2,7149	
500	2,7156	
10000	2,7181	
1E+06	2,718280	
1E+10	2,718282	
1E+14	2,716110	??
1E+19	1,000000	??

William Shanks (1812 – 1882) obliczył liczbę e z dokładnością do 205 miejsc po przecinku . Większość naukowców uznaje, że to Euler jako pierwszy udowodnił, że e jest liczbą niewymierną.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -4$$

$$x^2 + 3x + 4 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{-7}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{-7}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{-7}}{2}, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{-7}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{-1}$$

$$i = \sqrt{-1}\text{:} \quad x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, \qquad x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Liczby zespolone

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{a} + \mathbf{bi}$$

a, b liczby rzeczywiste

Działania tak jak z pierwiastkiem:

$$\left(3 - 2\sqrt{7}\right)\left(5 + 4\sqrt{7}\right) = 15 - 8\sqrt{7}\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7}$$

$$= -41 + 2\sqrt{7}, \text{ gdyż } \sqrt{7}\sqrt{7} = 7$$

$$(3 - 2i)(5 + 4\mathrm{i}) = 15 - 8i^2 + 12\mathrm{i} - 8\mathrm{i} = 15 + 8 + 4i$$

$$= 23 + 4\mathrm{i}, \text{ gdyż } i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

Girolamo Cardano (1501-1576)

Cardano był pierwszym historii, który w księdze ARS MAGNA nie do końca rozumiejąc, wprowadził element pośredni do obliczeń rozwiązując pewne równanie trzeciego stopnia, mianowicie liczby zespolone postaci

$$\mathrm{a} + \sqrt{-\mathrm{c}},$$

co jest równoważne

(przy użyciu jednostki urojonej **i**)

$\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{c}}\mathbf{i} = a + b\mathbf{i}$, gdzie $\mathrm{b} = \sqrt{\mathrm{c}}$

Rafael Bombelli jest autorem

l'Algebra (1572 i 1579), zestawu trzech książek.

Bombelli wprowadza notację dla $\sqrt{-1}$

i nazywa to „pi'u di meno” (*mniej więcej*).

$$x^3 = 15x + 4$$

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + bi \qquad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - bi$$

a=2, b=1

$$x = a + bi + a - bi = 2a = 4$$

Symbol i wprowadził wyżej wspomniany Leonard Euler (1707-1783)

On także wprowadził formuły:

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Połączenie (CZŁOWIEK MATEMATYKĘ ODKRYWA A NIE TWORZY?)

$$1+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i*\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\,\frac{\pi}{2}}$$

$$-1+0i = \cos(\pi)+i*\sin(\pi)=e^{i\,\pi}$$

$$\boldsymbol{e^{i\,\pi}+1=0}$$

Piosenka o Pi

https://youtu.be/QTeuIglcX1M

Sztuka o Pi i e

http://mkweb.bcgsc.ca/pi/

Z czego korzystałem przygotowując prezentację

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

https://www.aakash.ac.in/blog/top-10-indian-mathematicians-their-inventions/

https://docplayer.pl/198454-Historia-p-czyt-pi.html

Merino, O. (2006). A short history of complex numbers. University of Rhode Island.